# МАТЕМАТИКА

УДК 517.927.25

Малеко Е.М., Чурсина Н.В., Пузанкова Е.А.

## ВОЗМУЩЕНИЕ ОПЕРАТОРА ВЕБЕРА-ЭРМИТА ОПЕРАТОРОМ СДВИГА

В работе рассмотрено возмущение оператора Вебера-Эрмита одним оператором сдвига. С учетом полученных ограничений вычислены собственные числа и собственные функции возмущенного оператора.

***Ключевые слова:*** гильбертово пространство, собственные числа, собственные функции.

In work perturbation of operator Weber-Hermite of one operator of shift is considered. In view of the received restrictions eigennumbers and eigenfunctions of the perturbation operator are calculated.

***Key words:*** Hilbert space, eigenvalues, eigenfunctions.

В [3] рассмотрен действующий в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве (СГП) H дискретный оператор $A$, собственные числа $\lambda_m \in C$ которого простые и занумерованы в порядке возрастания модулей, а соответствующие собственные функции $\varphi_m$ образуют в H ортонормированный базис, $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. В этой же работе был рассмотрен и действующий в H оператор

$$B_{k,\alpha} := A + \alpha P_k,\ k \in \mathrm{N},$$

где $P_k$ – оператор сдвига,

$$P_k \varphi_m = \gamma_{k,m} \cdot \varphi_{m+k},$$

то есть $\forall h \in D(P_k)\ P_k h = \sum_{m=0}^{\infty} h_m \gamma_{k,m} \varphi_{m+k}$,

$$h_m = (h, \varphi_m). \tag{1}$$

Здесь $(\cdot,\cdot)$ – скалярное произведение в H, $\alpha \in C$, $\gamma_{k,m}$ – положительные числа. В [1] все числа $\gamma_{k,m} = 1$. Области определения операторов:

$$D(P_k) = \left\{h \in \mathrm{H} : \{\gamma_{k,m} h_m\}_{m=\overline{0,\infty}} \in \ell_2\right\},$$
$$D(A) = \left\{h \in \mathrm{H} : \{\lambda_m h_m\}_{m=\overline{0,\infty}} \in \ell_2\right\}$$
$$D(B_{k,\alpha}) = D(A) \cap D(P_k).$$

Это следует из изоморфизма пространств H и $\ell_2$. Доказана (в [3]) следующая теорема.

***Теорема 1.*** *Если для любого $m \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, некоторого $\alpha_0(k) > 0$ и любых комплексных $\alpha$, таких, что $0 < |\alpha| < \alpha_0(k)$ выполняются включения*

$$\begin{aligned} &\{\lambda_{sk+m} \upsilon_{s,m}(\alpha)\}_{s=\overline{0,\infty}} \in \ell_2, \\ &\{\gamma_{k,sk+m} \upsilon_{s,m}(\alpha)\}_{s=\overline{0,\infty}} \in \ell_2, \end{aligned} \tag{2}$$

$$\upsilon_{s,m}(\alpha) = \alpha^s \frac{\prod_{j=0}^{s-1} \gamma_{k,jk+m}}{\prod_{j=1}^{s} (\lambda_m - \lambda_{jk+m})},\ \upsilon_{0,m}(\alpha) = 1,$$

*то справедливы равенства*

$B_{k,\alpha} \psi_m = \lambda_m\ \psi_m,$

*где* $$\psi_m = \varphi_m + \sum_{s=1}^{\infty} \upsilon_{s,m}(\alpha) \varphi_{sk+m}. \tag{3}$$

*Другими словами, $\lambda_m$ – собственные числа, $\psi_m$ – собственные функции оператора $B_{k,\alpha}$.*

В качестве оператора $A$ далее будем рассматривать оператор Вебера-Эрмита $A := -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{4}\mathrm{I}$, действующий в СГП $\mathrm{H} := L_2(0,\infty)$, $I$ – тождественный оператор. Областью определения $D(A)$ будем считать все функции $f = f(x)$ такие, что $f$ и $\frac{df}{dx}$ абсолютно непрерывны на любом отрезке полуоси $R_+^1$, причем $Af \in H$.

Собственными числами оператора $A$ являются числа $\lambda_n = n + \frac{1}{2}$, $n \in N \cup \{0\}$, а $\varphi_n = c_n^{-1} D_n$ – соответствующие собственные функции, образующие в H ортонормированный базис. Здесь $D_n = e^{-\frac{x^2}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n}} H_n\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$ – функции Вебера-Эрмита, а $H_n$ – многочлены Эрмита,

$$c_n = \|D_n\|_H = \sqrt[4]{2\pi}\sqrt{k!},\ \|\cdot\|_H = \left(\int_0^{+\infty} |\cdot|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

– норма в H.

Из [2, с. 122-124] известно, что

$$D_{n+1}(x) - xD_n(x) + nD_{n-1}(x) = 0,$$

а также

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[e^{\frac{x^2}{4}} D_n(x)\right] = (-1)^k (-n)_k e^{\frac{x^2}{4}} D_{n-k}(x), \quad (4)$$

$$\frac{d^k}{dx^k}\left[e^{-\frac{x^2}{4}} D_n(x)\right] = (-1)^k e^{-\frac{x^2}{4}} D_{n+k}(x),\ k=1,2,3,\ldots . \quad (5)$$

Здесь

$$(-n)_k = \begin{cases} -n, & k=1, \\ (-n)(-n+1), & k=2, \\ (-n)(-n+1)(-n+2), & k=3, \\ \ldots & \ldots \end{cases}$$

Из (4), (5) получим

$$P_n^- D_n(x) := \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{n} \frac{d}{dx}\left[e^{\frac{x^2}{4}} D_n(x)\right] = D_{n-1}(x),$$

$$P^+ D_n(x) := -e^{\frac{x^2}{4}} \frac{d}{dx}\left[e^{-\frac{x^2}{4}} D_n(x)\right] = D_{n+1}(x).$$

Для $k \in N$ имеем

$$\left(P^+\right)^k D_n(x) = P^+\left(P^+\right)^{k-1} D_n(x) = D_{n+k}(x),\ \left(P^+\right)^0 = \text{II},$$

и

$$\left(P^+\right)^k \varphi_n(x) = \gamma_{k,n} \varphi_{n+k}(x),$$

где $\gamma_{k,n} = c_{n+k} / c_n$, $\gamma_{k,n} = \sqrt{(n+1)\ldots(n+k)}$. Очевидно, что $\forall j \|\varphi_j\| = 1$.

Коэффициенты $\vartheta_{s,m}(\alpha)$ ряда (3):

$$\vartheta_{s,m}(\alpha) = \alpha^s \frac{\sqrt{(m+1)\ldots(m+sk)}}{\prod_{j=1}^{s}\left(m+1/2-\left(jk+m\right)-1/2\right)} = \quad (6)$$

$$= \alpha^s \sqrt{\frac{(sk+m)!}{m!}} \frac{1}{(-1)^s s! k^s} = \sqrt{\frac{(sk+m)!}{m!}} \left(-\frac{\alpha}{k}\right)^s \frac{1}{s!}.$$

Используя формулу Стирлинга, из (6) получим

$$\vartheta_{s,m}(\alpha) \approx \sqrt{\frac{\left(\frac{sk+m}{e}\right)^{sk+m} \cdot \sqrt{2\pi(sk+m)}}{\left(\frac{m}{e}\right)^m \cdot \sqrt{2\pi m}}} \frac{1}{\left(\frac{s}{e}\right)^s \cdot \sqrt{2\pi s}} \left(-\frac{\alpha}{k}\right)^s = \quad (6)$$

$$= \sqrt{\frac{(sk+m)^{sk+m+1/2}}{m^{m+1/2} e^{sk}} \cdot \frac{1}{\left(\frac{s}{e}\right)^{2s} 2\pi s}} \left(-\frac{\alpha}{k}\right)^s =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi s m^{m+1/2}}} \sqrt{\frac{(sk+m)^{sk+m+1/2}}{s^{2s}}} \left(-\frac{\alpha}{e^{(k-2)/2} k}\right)^s$$

Проверим: для каких $k \in N$ и $\alpha \in C$ справедливы включения (2). То есть найдем условия, при которых ряды

$$F_1(k) := \frac{m^{-m-1/2}}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(sk+m+1/2\right)^2}{s} \frac{\left(sk+m\right)^{sk+m+1/2}}{s^{2s}} \left(\frac{|\alpha|}{e^{\frac{k-2}{2}} k}\right)^{2s}, \quad (7)$$

$$F_2(k) := \frac{m^{-m-1/2}}{2\pi} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(sk+m+1\right)\ldots\left(sk+m+k\right)}{s} \frac{\left(sk+m\right)^{sk+m+1/2}}{s^{2s}} \left(\frac{|\alpha|}{e^{\frac{k-2}{2}} k}\right)^{2s} \quad (8)$$

сходятся для ненулевых $\alpha \in C$.

Пусть $k = 1$. Тогда (7) оценим следующим образом:

$$F_1(1) < \frac{e^m}{2\pi m^{m+1/2}} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(sk+m+1/2\right)^2 (s+m)^{m+1/2}}{s} \left(e|\alpha|^2\right)^s \frac{1}{s^s}. \quad (9)$$

Так как интеграл $\int_1^\infty s^{m+3/2} \left(\frac{M_1}{s}\right)^s ds$ сходится для любого положительного $M_1$, то сходится ряд в правой части (9), а следовательно, и ряд (7) при $k = 1$ сходится для любого $\alpha \in C$.

Аналогично оценим ряд (8):

$$F_2(1) < \frac{e^m}{2\pi m^{m+1/2}} \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(sk+m+1\right)\left(s+m\right)^{m+1/2}}{s} (e|\alpha|^2)^s \frac{1}{s^s}. \quad (10)$$

Интеграл $\int_1^\infty s^{m+1/2} \left(\frac{M_1}{s}\right)^s ds$ сходится для любого положительного $M_1$, поэтому сходится ряд в правой части (10), а следовательно, и ряд (8) при $k = 1$ сходится для любого $\alpha \in C$.

Пусть $k = 2$. Тогда из (7) и (8) получим

$$F_1(2) < \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \left(\frac{2e}{m}\right)^m \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(2s+m+1/2\right)^2 (s+m/2)^{m+1/2}}{s} |\alpha|^{2s}, \quad (11)$$

$$F_2(2) < \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \left(\frac{2e}{m}\right)^m \times$$
$$\times \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\left(2s+m+1\right)\left(2s+m+2\right)(s+m/2)^{m+1/2}}{s} |\alpha|^{2s}. \quad (12)$$

Интеграл $\int_1^\infty s^{m+3/2}|\alpha|^{2s}ds$ сходится для любого ненулевого комплексного числа $\alpha$ такого, что $|\alpha|<1$. Поэтому сходятся ряды в правых частях (11) и (12), а следовательно, при $k = 2$ ряды (7) и (8) сходятся при тех же значениях $\alpha$.

Пусть $k>2$. Оценим ряды (7) и (8):

$$F_1(k)>\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}s^{s(k-2)+1}\left(\frac{|\alpha|}{ke^{(k-2)/2}}\right)^{2s}, \quad (13)$$

$$F_2(k)>\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}s^{s(k-2)+k-1}\left(\frac{|\alpha|}{ke^{(k-2)/2}}\right)^{2s}. \quad (14)$$

Из оценок (13) и (14) и расходимости интегралов $\int_1^\infty s^{s(k-2)+1}M_2^{2s}ds$ и $\int_1^\infty s^{s(k-2)+k-1}M_2^{2s}ds$ $(0<M_2<\infty)$ следует расходимость ряда (7) и (8) для $k>2$ и любого ненулевого комплексного $\alpha$.

По теореме 1 собственные функции возмущенного оператора Вебера-Эрмита $B_{k,\alpha}:=A+\alpha P_k$ принимают вид

$$\widetilde{\psi}_m=\varphi_m+\sum_{s=1}^{\infty}\upsilon_{s,m}(\alpha)\varphi_{sk+m},$$

однако с учетом представлений $\varphi_n=c_n^{-1}D_n$ достаточно просто выводятся и равенства (15). Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Утверждение.** *Оператор $B_{k,\alpha}=A+\alpha P_k$ ($A$ – оператор Вебера-Эрмита, $P_k=(P^+)^k$), действующий в СГП $H:=L_2(0,\infty)$, удовлетворяет всем условиям теоремы 1 при $k=1$ с $\alpha_0(1)=\infty$ и при $k=2$ с $\alpha_0(2)=1$. Его собственными числами являются числа $\lambda_m=m+1/2$, $m\in N\cup\{0\}$, а соответствующие собственные функции имеют вид*

$$\psi_m=D_m+\sum_{s=1}^{\infty}\frac{\alpha^s}{\prod_{j=1}^{s}(\lambda_m-\lambda_{jk+m})}D_{sk+m}. \quad (15)$$

**Список литературы**


1. Малеко Е.М. К вычислению спектра дискретных и направленно возмущенных операторов: монография. Магнитогорск: МаГУ, 2007. 160 с.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Изд-е. 2-е, стереотип. М.: Наука, 1974. 296 с.: ил.
3. Малеко Е.М., Чурсина Н.В. О возмущении дискретного оператора оператором сдвига // Вестник МГТУ им. Г.И Носова. 2011. №4.


**Bibliografy**


1. Maleko E.M. To calculation of the spectra of discrete and of directionally perturbed operators: the monography. Magnitogorsk: MaSU, 2007. 160 p.
2. Bateman H., Erdelyi A. Higher transcendental functions: functions of Bessel, parabolic cylinder functions, orthogonal polynomials. Publ. the second. M.: The science, 1974. 296 p.
3. Maleko E.M., Chursina N.V. About perturbation of discrete operator of the operator of shift // The bulletin MGTU named after G.I. Nosov. 2011. №4.