УДК 536.24

РАСЧЕТ ИЗМЕНЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ РАДИАЛЬНОГО РЕБРА ПРИ ЛУЧИСТОМ ТЕПЛООТВОДЕ С ЕГО ПОВЕРХНОСТИ

Видин Ю.В., Казаков Р.В.

Сибирский федеральный университет, г. Красноярск, Россия

Аннотация. Разработан приближенный аналитический метод расчета изменения температуры в радиальном ребре при радиационном теплообмене на его поверхности. Предложенный метод основан на получении нижней и верхней оценок искомого поля температуры. При этом используется интегральное линеаризующее преобразование, благодаря которому удается существенно уменьшить влияние линейного члена в исходном дифференциальном уравнении. Полученные аналитические выражения позволяют сравнительно просто оценить максимальные и минимальные значения температуры по радиусу ребра. В расчетах используются модифицированные функции Бесселя, числовые значения которых подробно затабулированы. Как показали расчеты, расхождение между граничными значениями температуры оказывается небольшим даже при повышенных значениях радиационного числа Старка. Средняя арифметическая величина температуры между граничными температурами весьма близка к действительной.

Ключевые слова: температурное поле, радиационный теплообмен, радиальная ребристая поверхность, аналитический метод, модифицированные функции Бесселя.

Введение

В технике для интенсификации теплообмена широко используются оребренные поверхности [1]. Чаще всего ребра выполняются в радиальной форме. В условиях низкого вакуума основным видом теплоотдачи с развитых поверхностей такого типа происходит излучением. Тогда математическая постановка задачи может быть записана в следующем виде:

$$\frac{d^2T}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dT}{dr}-\frac{2\sigma_в}{\lambda\delta}T^4=0; \quad (1)$$

$$T=T_0 \text{ при } r=R_1; \quad (2)$$

$$\frac{dT}{dr}=0 \text{ при } r=R_2 \quad (3)$$

Здесь $T=T(r)$ – искомое распределение температуры ребра по его радиусу r, К; T_0 – абсолютная температура основания ребра, К; $\sigma_в$, λ – видимый коэффициент теплообмена излучением и коэффициент теплопроводности материала тела соответственно, $\frac{Вт}{м^2К^4}$, $\frac{Вт}{мК}$; δ – полная толщина ребра, м; R_1, R_2 – внутренний и внешний радиусы ребра соответственно, м.

Решение задачи

С математической точки зрения целесообразно систему (1)–(3) привести к безразмерному виду, введя следующие величины: $\vartheta=\frac{T}{T_0}$ – безразмерная температура, $\psi=\frac{r}{R_2}$ – безразмерная радиальная координата, которая меняется от $\psi_0=\frac{R_1}{R_2}$ до $\psi=1$; $Sk=\frac{2\sigma_в T_0^3 R_2^2}{\lambda\delta}$ – радиационное число Старка.

Тогда задача (1) – (3) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\vartheta}{d\psi^2}+\frac{1}{\psi}\frac{d\vartheta}{d\psi}-Sk\vartheta^4=0; \quad (4)$$

$$\vartheta_2=1 \text{ при } \psi=\psi_0; \quad (5)$$

$$\frac{d\vartheta}{d\psi}=0 \text{ при } \psi=1. \quad (6)$$

Дифференциальное уравнение (4) является существенно нелинейным. Поэтому получить строгое аналитическое решение системы (4)–(6)

весьма затруднительно.

Однако для инженерно-технических расчетов, как правило, достаточно ограничиться приближенным методом, который имел бы приемлемую точность и был сравнительно несложным. В этом отношении наиболее подходит способ, основанный на нахождении нижней и верхней оценок искомого поля температуры $\vartheta(\psi)$ при условии, что они оказываются достаточно близко расположенными друг к другу. Для этого целесообразно трансформировать выражение (4), использовав интегральное линеаризующее преобразование, предложенное в работах [2, 3]. Согласно рекомендуемому подходу в рассматриваемом случае нужно ввести новую зависимую переменную $U=U(\psi)$, связанную с $\vartheta=\vartheta(\psi)$ соотношением

$$U(\psi)=\int_1^{\vartheta(\psi)}\frac{d\eta}{\eta^4}=\frac{1}{3}(1-\vartheta^{-3}), \qquad (7)$$

то есть

$$\vartheta(\psi)=\sqrt[3]{\frac{1}{1-3U(\psi)}}. \qquad (8)$$

С учетом (7) задача (4)–(6) принимает вид

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}+\frac{1}{\psi}\frac{dU}{d\psi}+4\vartheta^3\left(\frac{dU}{d\psi}\right)^2-Sk=0, \qquad (9)$$

$U=0$ при $\psi=\psi_0$, (10)

$$\frac{dU}{d\psi}=0 \text{ при } \psi=1. \qquad (11)$$

Нелинейный комплекс $F(\psi)=4\vartheta^3\left(\frac{dU}{d\psi}\right)^2$, появившийся в преобразованном уравнении (9), имеет более слабое математические влияние, чем величина ϑ^4 в исходном уравнении (4), что обусловлено в определенной степени граничным соотношением (11).

Функцию $F(\psi)$, входящую в зависимость (9), можно рассматривать с функциональной точки зрения как некоторый внутренний положительный источник тепла, действующий постоянно в ребре. Поэтому, если в первом приближении его не учитывать, то интегрирование системы (9)–(11) позволит определить $U(\psi)$, а затем и температуру $\vartheta(\psi)$, которая при принятом допущении будет являться нижней границей для фактического распределения температуры.

Очевидно, что при условии $F(\psi) = 0$ решение для функции U принимает вид

$$U=\frac{Sk}{2}\left(\frac{\psi^2-\psi_2^2}{2}-\ln\frac{\psi}{\psi_0}\right). \qquad (12)$$

Следовательно, минимальное распределение температуры по поверхности радиального ребра, после подстановки (12) в (8) запишется в простой форме

$$\vartheta_{наим}(\psi)=\sqrt[3]{\frac{1}{1+\frac{3Sk}{2}\left(\ln\frac{\psi}{\psi_0}-\frac{\psi^2-\psi_0^2}{2}\right)}}. \qquad (13)$$

Для нахождения верхней границы для искомой температуры $\vartheta(\psi)$ примем нелинейный комплекс $F(\psi)$, представляющий в уравнении (9), как отмечалось выше, некоторый условный внутренний положительный источник тепловыделения, максимально теоретически возможным, а именно

$$F(\psi)=4\left(\frac{dU}{d\psi}\right)^2,$$

т.е. предполагается, что $\vartheta^3(\psi)=1$.

Тогда зависимость (9) запишется

$$\frac{d^2U}{d\psi^2}+\frac{1}{\psi}\frac{dU}{d\psi}+4\left(\frac{dU}{d\psi}\right)^2-Sk=0. \qquad (14)$$

Для осуществления процедуры интегрирования задачи (14), (10)–(11) рационально ввести новую зависимую переменную на основе соотношения

$$\frac{dU}{d\psi}=W. \qquad (15)$$

С учетом (15) система (14), (10)–(11) преобразуется к виду

$$\frac{dW}{d\psi}+\frac{1}{\psi}W+4W^2-Sk=0, \qquad (16)$$

$W=0$ при $\psi=1$. (17)

Аналитическое решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения (16), относящегося к классу уравнений Риккати [4], при краевом условии (17) может быть представлено через модифицированные функции Бесселя

$$W = \frac{a}{4}\frac{K_1(a)I_1(a\psi) - I_1(a)K_1(a\psi)}{K_1(a)I_0(a\psi) + I_1(a)K_0(a\psi)}, \tag{18}$$

где параметр $a = 2\sqrt{Sk}$.

Далее, используя зависимость (15), (18) и условие (10), нетрудно получить выражение для промежуточной функции $U(\psi)$

$$U(\psi) = \ln\sqrt[4]{\frac{K_1(a)I_0(a\psi) + I_1(a)K_0(a\psi)}{K_1(a)I_0(a\psi_0) + I_1(a)K_0(a\psi_0)}}. \tag{19}$$

Подставляя теперь (19) в (8), удается вывести верхнюю аналитическую оценку для искомого распределения температуры вдоль радиального ребра

$$\vartheta_{\max} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + 3\ln\sqrt[4]{\dfrac{K_1(a)I_0(a\psi_0) + I_1(a)K_0(a\psi_0)}{K_1(a)I_0(a\psi) + I_1(a)K_0(a\psi)}}}}. \tag{20}$$

Согласно выражению (20) наибольшая температура на вершине радиального ребра (ψ=1) может быть рассчитана по формуле

$$\vartheta_{\max}(\psi = 1) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + 3\ln\sqrt[4]{\dfrac{K_1(a)I_0(a\psi_0) + I_1(a)K_0(a\psi_0)}{K_1(a)I_0(a) + I_1(a)K_0(a)}}}}. \tag{21}$$

Однако, учитывая, что согласно теории Бесселевых функций [8] сумма $K_1(a)I_0(a) + I_1(a)K_0(a) = \dfrac{1}{a}$, решение (21) значительно упрощается

$$\vartheta_{\max}(\psi = 1) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + 3\ln\sqrt[4]{a[K_1(a)I_0(a\psi_0) + I_1(a)K_0(a\psi_0)]}}}. \tag{22}$$

Если необходимо несколько поднять нижнюю граничную температурную кривую, вычисляемую по (13), то это может быть выполнено на основе второго приближения

$$\vartheta_{\min} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \dfrac{3}{b}\ln\dfrac{K_1(a)I_0(a\psi_0) + I_1(a)K_0(a\psi_0)}{K_1(a)I_0(a\psi) + I_1(a)K_0(a\psi)}}}, \tag{23}$$

где параметры a и b соответственно равны $a = \sqrt{bSk}$; $b = 4\vartheta^3_{наим}(\psi = 1)$,

причем значение температуры $\vartheta_{наим}(\psi = 1)$ находится по выражению (13)

$$\vartheta_{наим}(\psi = 1) = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \dfrac{3}{2}\left(\ln\dfrac{1}{\psi_0} - \dfrac{1 - \psi_0^2}{2}\right)}}. \tag{24}$$

Следует отметить, что формула (23) получена по той же методике, что и решение (21).

Как правило, поле между температурными кривыми, рассчитываемыми по (21) и (23), оказывается очень узким. Следовательно, эти две зависимости позволяют получить весьма близкие оценки истинного распределения температуры как «сверху», так и «снизу» (см. **таблицу**).

Модифицированные функции Бесселя первого рода $I_n(x)$ и второго рода $K_n(x)$ нулевого и первого порядка (n=0; 1) хорошо изучены и весьма подробно затабулированы, например [5–7].

Кроме этого названные функции могут быть представлены в виде следующих расчетных зависимостей [5–7]:

$$I_0(x) = 1 + \frac{1}{(1!)^2}\frac{x^2}{4} + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 + \frac{1}{(3!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right) + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n; \tag{25}$$

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 + \frac{1}{3!4!}\left(\frac{x}{2}\right)^7 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}; \tag{26}$$

$$K_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^4\sum_{K=1}^{n}\frac{1}{K} - \left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)I_0(x); \tag{27}$$

$$K_1(x) = (\gamma + \ln\frac{x}{2})I_1(x) + \frac{1}{x} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}\left(\sum_{K=1}^{n+1}\frac{1}{K} - \frac{1}{2n+2}\right), \tag{28}$$

где γ означает постоянную Эйлера, равную γ=0,57721566.

Модифицированная функция Бесселя второго рода первого порядка $K_1(x)$ может быть представлена также в более простом виде:

$$K_1(x) = \frac{\dfrac{1}{x} - I_1(x)K_0(x)}{I_0(x)}.$$

В большинстве случаев, встречающихся в практических расчетах, аргумент x в формулах (25)–(28) существенно упрощается. Тогда вместо бесконечных сумм (25), (26) используются усеченные ряды, учитывающие максимум первые четыре слагаемых, т.е.

$$I_0(x) = \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{(n!)^2}\left(\frac{x^2}{4}\right)^n, \tag{29}$$

$$I_1(x) = \sum_{n=0}^{4}\frac{1}{n!(n+1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}. \tag{30}$$

При x<2 число первых весомых слагаемых в выражениях (29) и (30) оказывается еще меньше.

Результаты расчета нижних и верхних граничных значений безразмерной температуры радиального ребра в сечениях ψ=0,75 и ψ=1 для вариантов *Sk*=1,0; 1,5; 2,0 при ψ_0=0,5.

Номер расчетной зависимости	*Sk*=1		*Sk*=1,5		*Sk*=2,0	
По ф-ле (13)	0,900	0,878	0,862	0,835	0,830	0,800
По ф-ле (23)	0,912	0,890	0,882	0,854	0,856	0,822
По ф-ле (22)	0,917	0,895	0,893	0,864	0,874	0,840

Выводы

1. Числовые различия между наименьшими и наибольшими значениями температуры при умеренных числах Старка почти отсутствуют.

2. С возрастанием радиационного числа Старка «вилка» между $\vartheta_{наим}$ и $\vartheta_{наиб}$ несколько возрастает. Однако по абсолютной величине невязки $\Delta\vartheta = \vartheta_{наиб.} - \vartheta_{наим.}$ оказывается с инженерной точки зрения небольшими.

Список литературы

1. Керн Д., Краус А. Развитые поверхности теплообмена. М.: Энергия, 1977. 461 с.
2. Видин Ю.В. Инженерне методы расчета процессов теплообмена. Красноярск: КрПИ, 1974. 145 с.
3. Видин Ю.В. Инженерные методы теплопроводности. Красноярск: Изд-во Красноярск. гос. ун-та, 1992. 96 с.
4. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976. 576 с.
5. Видин Ю.В. Краткий справочник по тепломассообмену. Красноярск: Сибирский федеральный университет, 2007. 170 с.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
7. Сегал Б.И., Семендяев К.А. Пятизначные математические таблицы. М.: Физматгиз, 1962. 450 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

CALCULATION OF TEMPERATURE CHANGES OF A RADIAL RIB IN CASE OF RADIANT HEAT REMOVING FROM ITS SURFACE

Vidin Yury Vladimirovich – Ph.D. (Eng.), Professor, Siberian Federal University, Russia.

Kazakov Roman Vladimirovich – Ph.D. (Eng.), Associate Professor, Siberian Federal University, Russia. E-mail: roman.kazakov@list.ru

Abstract: An approximate analytical calculation of temperature changes in the radial rib in case of radiant heat transfer on its surface is prepared. The proposed method is based on higher and lower estimate of the required temperature field. The authors use an integral linearizing transformation which contributes to a significant decrease in the effect of a linear component in the original differential equation. It is rather easy to evaluate maximum and minimum temperature along the rib radius using the resulted analytical expressions. The calculations use modified Bessel functions, whose numeric values are tabulated in detail. According to the calculations, a difference in limit temperature values is minor even at increased values of the Stark radiation number. A temperature arithmetic mean of limit temperatures is rather close to a real one.

Keywords: temperature field, radiant heat transfer, radial ribbed surface, analytical method, modified Bessel functions.

References

1. Kern D., Kraus A. *Razvitye poverkhnosti teploobmena* [Developed heat exchange surfaces]. Moscow: Energiya, 1977, 461 p.
2. Vidin Yu.V. *Inzhenernye metody rascheta protsessov teploobmena* [Engineering methods of calculating heat transfer processes]. Krasnoyarsk: KrPI, 1974, 145 p.
3. Vidin Yu V. *Inzhenernye metody teploprovodnosti* [Engineering methods of thermal conductivity]. Krasnoyarsk: Krasnoyarsk State University, 1992, 96 p.
4. Kamke E. *Spravochnik po obyknovennym differentsialnym uravneniyam* [Handbook of ordinary differential equations]. Moscow: Nauka, 1976, 576 p.
5. Vidin Yu.V. *Krankiy spravochnik po teplomassoobmenu* [Quick reference guide for heat and mass transfer]. Krasnoyarsk: Siberian Federal University, 2007, 170 p.
6. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsialnym funktsiyam* [Handbook of special functions]. Moscow: Nauka, 1979, 830 p.
7. Segal B.I., Semendyaev K.A. *Pyatiznachnye matematicheskie tablitsy* [Five-figure mathematical tables]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1962, 450 p.
8. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow: Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematicheskoy literatury, 1963, 1100 p.