ОБРАБОТКА МЕТАЛЛОВ ДАВЛЕНИЕМ

УДК 539.319

РАВНОНАПРЯЖЕННЫЕ ЛИСТОВЫЕ РЕССОРЫ

Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Гитман М.Б.

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Россия.

Аннотация. Приведен ряд результатов по отысканию параметров равнонапряженных листовых рессор. Рассмотрен нелинейный изгиб однолистовой рессоры переменного профиля и установлено, что оптимальный профиль при сильном изгибе является эллиптическим. Изучен линейный изгиб двухлистовой рессоры с листами переменного профиля. Доказано, что для листов различной длины равнонапряженная рессора не существует при сохранении знака напряжения вдоль листов; для листов одинаковой длины такая рессора существует. Если же знак может не сохраняться, но модуль напряжения сохраняется, то равнонапряженная рессора существует при достаточно большой длине короткого листа и имеет внутренний шарнир. Найдены параметры частично равнонапряженной двухлистовой рессоры с листами постоянного профиля и установлена связь этих параметров с решением задачи минимизации максимальных напряжений в рессоре.

Ключевые слова: листовая рессора, линейный и нелинейный изгиб, равнонапряженная рессора, внутренний шарнир, минимизация напряжений.

Введение

Листовые рессоры широко используются в подвесках автомобилей **(рис. 1)** [1, 2]. Известно также использование листовых рессор в качестве упругих элементов протезов стопы **(рис. 2)** [3–5]. Поэтому задача о проектировании надежных и долговечных листовых рессор является актуальной. Важнейшей характеристикой рессоры, определяющей ее прочность, является величина максимального напряжения. Оптимальными считаются *равнонапряженные* рессоры, или максимально приближенные к равнонапряженным [1, 4, 6, 7]. В настоящее время задача такой оптимизации рессоры не является в достаточной мере изученной, в частности, потому, что требует решения также недостаточно изученной задачи об одностороннем контакте листов рессоры [8, 9]. В данной работе рассмотрены такие задачи построения равнонапряженной рессоры, которые требуют лишь минимального обращения к решению соответствующей контактной задачи.

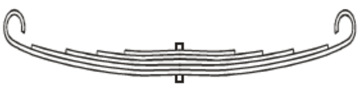

Рис. 1. Упругий элемент подвески автомобиля

Рис. 2. Упругий элемент протеза стопы

Математическая модель листовой рессоры

Простейшая модель листовой рессоры [6, 8] представляет собой пачку N консольно закрепленных балок (листов) Бернулли – Эйлера [10] одинаковой ширины w, но с различными длинами $l_1,..., l_N$ и различными переменными толщинами $h_1(x),..., h_N(x)$ (x – координата, отсчитываемая вдоль балки) **(рис. 3)**.

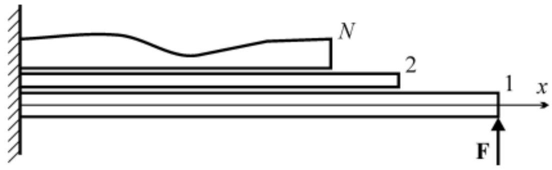

Рис. 3. Модель листовой рессоры

В естественном состоянии (без нагрузки) листы являются плоскими и плотно прилегают друг к другу; трение между листами отсутствует. К краю самого длинного листа, перпендикулярно листу, приложена сосредоточенная следящая сила F. Форма изогнутого листа (в равновесии) задается функцией $\varphi(x)$, где φ – угол между профилями изогнутого и неизогнутого листов **(рис. 4)**. Если лист изогнут, то в точке с координатой x со стороны правой (по отношению к данной точке) части листа на левую действует сосредоточенный момент

$$M(x) = Ewh^3(x)\varphi'(x)/12, \tag{1}$$

где E – модуль Юнга. При этом напряжение (единственная существенная компонента σ_{xx}) на нижней поверхности листа

$$\sigma(x) = Eh(x)\varphi'(x)/2. \qquad (2)$$

Оптимальными считаются равнонапряженные рессоры, то есть удовлетворяющие условию

$$|\sigma_n(x)| \equiv \sigma = \text{const}, \quad 1 \le n \le N. \qquad (3)$$

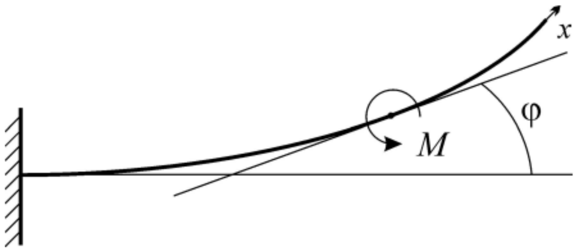

Рис. 4. Схема изгиба одного листа

При невозможности построения равнонапряженной рессоры требуется построить частично равнонапряженную рессору (см. ниже). Равнонапряженность (полная иди частичная) достигается подбором функций $h_n(x)$. Рассмотрим вопрос об отыскании этих функций в некоторых частных случаях.

Оптимальный профиль однолистовой рессоры при нелинейном изгибе

Пусть рессора однолистовая. Уравнение равновесия листа следует из (1) с учетом сделанного предположения о нагрузке (сосредоточенная сила):

$$Ewh^3(x)\varphi'(x)/12 = F\int_x^l \cos(\varphi(l)-\varphi(s))\,ds. \qquad (4)$$

Из (2)–(4) и условия защемления листа (при $x = 0$) находим

$$\begin{cases} \varphi''/\varphi'^3 = \lambda\cos(\varphi(l)-\varphi), \\ \varphi(0)=0, \quad \varphi'(l) = +\infty, \end{cases} \qquad (5)$$

где $\lambda = 3E^2F/(4\sigma^3 w)$. Нелинейность задачи (5) означает, что рассматривается сильный изгиб. Решение (5) существует (и единственно) при $l/\lambda \le 2$ и имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(x) = \arccos(1-l/\lambda) - \\ -\arccos(1-(l-x)/\lambda)\end{aligned}. \qquad (6)$$

Тогда из (2), (3) получаем

$$h(x) = (2\sigma\lambda/E)\sqrt{1-(1-(l-x)/\lambda)^2}, \qquad (7)$$

то есть однолистовая равнонапряженная рессора имеет *эллиптический профиль*.

Практически при нахождении профиля задается не σ, а прогиб рессоры

$$\Delta = \int_0^l \sin\varphi(x)\,dx.$$

Тогда из (6) находим, что $l/\lambda = 1-\cos\alpha$, где $0 < \alpha \le \pi$ – корень уравнения

$$(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)/(1-\cos\alpha) = 2\Delta/l. \qquad (8)$$

Легко установить, что при $\Delta/l \le \pi/4$ это уравнение имеет единственное решение. Если $\Delta/l << 1$ (слабый изгиб; эквивалентное условие: $|\varphi(x)| << 1$), то из (7), (8) получаем известный результат [1]: $h(x) = 2l(F/Ew\Delta)^{1/3}\sqrt{1-x/l}$, то есть однолистовая равнонапряженная рессора при слабом изгибе имеет параболический профиль.

Оптимальные профили двухлистовой рессоры при линейном изгибе

Теперь рассмотрим двухлистовую рессору при слабом изгибе. Предположим, что: а) листы рессоры контактируют (кроме точки защемления) только в точке, расположенной на краю более короткого листа; б) $\sigma_n(x) \equiv \sigma$ (а не модуль, что требуется в (3)). Тогда уравнения равновесия листов имеют вид

$$Ewh_1^3(x)\varphi_1'(x)/12 = \begin{cases} -P(l_2-x)+F(l_1-x) & (0 \le x \le l_2), \\ F(l_1-x) & (l_2 \le x \le l_1), \end{cases} \qquad (9)$$

$$Ewh_2^3(x)\varphi_2'(x)/12 = P(l_2-x), \qquad (10)$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0, \qquad (11)$$

где P – сила взаимодействия листов, которая находится из условия контакта листов в точке $x = l_2$:

$$y_1(l_2) = y_2(l_2); \qquad (12)$$

$$y_n(x) = \int_0^x \varphi_n(s)\,ds. \qquad (13)$$

Из (9)–(13), (2), (3) (с учетом предположения (б)) можно получить уравнение для P в виде

$$\xi + 2\beta = \left(\xi+\beta\right)^2 / \sqrt{1-\xi^2} ,$$

где $\beta = \sqrt{1-l_2/l_1}$, $\xi = \sqrt{1-Pl_2/Fl_1}$. Легко установить, что при $0 \le \beta < 1$ это уравнение имеет единственное решение ξ. Однако, находя из (9)–(11), (2), (3) $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и затем из (13) $y_1(x)$, $y_2(x)$, можно показать, что при $l_2 < l_1$ $\lim\limits_{x\to 0} y_2(x)/y_1(x) < 1$ (верхний лист «проникает» под нижний), а при $l_2 = l_1$ $y_1(x) \equiv y_2(x)$. Таким образом, при $l_2 = l_1 = l$ получаем одинаковые параболические профили листов $h_1(x) = h_2(x) = 2l\left(F/2Ew\Delta\right)^{1/3}\sqrt{1-x/l}$, а при $l_2 < l_1$ равнонапряженная рессора, для которой выполняются принятые выше предположения (а) и (б), не существует.

Докажем, что при сохранении предположения (б) при $l_2 < l_1$ равнонапряженная рессора не существует, даже если отказаться от предположения (а) и допустить, что листы могут контактировать по некоторой области $0 < l_* \le x \le l_2 < l_1$. Учитывая, что при $0 \le x \le l_*$.

$$Ewh_1^3(x)\varphi_1'(x)/12 = F(l_1 - x) - \int_{l_*}^{l_2} p(s)(s-x)ds ,$$

$$Ewh_2^3(x)\varphi_2'(x)/12 = \int_{l_*}^{l_2} p(s)(s-x)ds ,$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0 ,$$

где $p(x) \ge 0$ – плотность сил взаимодействия листов, получим с учетом (2), (3), (13) из условий $\varphi_1(l_*) = \varphi_2(l_*)$ и $y_1(l_*) = y_2(l_*)$ соответственно

$$A_1 + A_2 = A_3 + A_4 ,$$
$$\frac{\left(A_1 + 2A_2\right)}{\left(A_1+A_2\right)^2} = \frac{\left(A_3 + 2A_4\right)}{\left(A_3+A_4\right)^2} , \qquad (14)$$

где

$$A_1 = \sqrt{F(l_1 - l_*) - \int_{l_*}^{l_2} p(s)(s-l_*)ds} ,$$

$$A_2 = \sqrt{Fl_1 - \int_{l_*}^{l_2} p(s)sds} , \qquad (15)$$

$$A_3 = \sqrt{\int_{l_*}^{l_2} p(s)(s-l_*)ds} ,$$

$$A_4 = \sqrt{\int_{l_*}^{l_2} p(s)sds} . \qquad (16)$$

Из (14)–(16) следует, что $\int_{l_*}^{l_2} p(s)ds = F/2$ и $\int_{l_*}^{l_2} p(s)sds \Big/ l_1 = F/2$, но эти два равенства противоречивы, так как $p(x) \ge 0$ и $l_2 < l_1$. Поэтому высказанное выше утверждение доказано.

Откажемся тогда от предположения (б), сохранив (а). Из (9), (2) следует, что если

$$Pl_2 > Fl_1 , \qquad (17)$$

то $\sigma_1(x)$ меняет знак в точке $x_* = \dfrac{\left(Pl_2 - Fl_1\right)}{\left(P-F\right)}$. Тогда из (9)–(13), (2), (3) получаем уравнение для P в виде

$$(1+\eta)^2 = \left(2 - \sqrt{\eta}(\eta+3)\right)\sqrt{\eta + \gamma/(\gamma-1)} ,$$

где $\gamma = l_1/l_2$, $\eta = \left(P/F - \gamma\right)/(\gamma - 1)$. Легко установить, что при $\gamma > 1$ это уравнение имеет единственное решение η, которому соответствует P, удовлетворяющее условию (17). Тогда профиль нижнего листа

$$h_1(x) = \begin{cases} \sqrt{6(P-F)(x_* - x)/\sigma w} & (0 \le x \le x_*), \\ \sqrt{6(P-F)(x - x_*)/\sigma w} & (x_* \le x \le l_2), \\ \sqrt{6F(l_1 - x)/\sigma w} & (l_2 \le x \le l_1). \end{cases}$$

Заметим, что $h_1(x_*) = 0$; это означает, что в точке $x = x_*$ нижний лист имеет *внутренний шарнир*. Профиль верхнего листа параболический:

$$h_2(x) = \sqrt{6P(l_2 - x)/\sigma w} .$$

Для проверки непротиворечивости предположения (а) и требования равнонапряженности рессоры нужно исследовать знак разности $y_2(x) - y_1(x)$. Можно установить, что $y_2(x) \ge y_1(x)$ при $\zeta < l_2/l_1 < 1$, где $\zeta = 2(4-\sqrt{2})/7$, а при $l_2/l_1 < \zeta$ существуют $0 < x < l_2$, для которых $y_2(x) < y_1(x)$. Тем самым, равнонапряженная рессора с найденными выше профилями существует только при $l_2/l_1 > \zeta$. Вопрос о существовании равнонапряженных двухлистовых рессор при слабом изгибе для $l_2/l_1 < \zeta$ остается открытым и требует дальнейшего исследования.

Частично равнонапряженная двухлистовая рессора с листами постоянной толщины

Рассмотрим двухлистовую рессору с листами постоянной толщины. Обеспечить полную равнонапряженность такой рессоры, очевидно, невозможно. Потребуем, чтобы рессора была частично равнонапряженной, а именно

$$\left|\sigma_1(x)\right| \equiv \sigma = \text{const},\ 0 \le x \le l_2; \quad \left|\sigma_2(0)\right| = \sigma\,. \tag{18}$$

Предполагая, что листы контактируют (кроме точки защемления) только в точке, расположенной на краю более короткого листа, из (9–13), (2), (18) нетрудно найти, что $l_2/l_1 = 4/13$, $h_2/h_1 = 2/3$. Легко также установить, что $y_2(x) \ge y_1(x)$ при $0 \le x \le l_2$, следовательно, принятое предположение о характере контакта подтверждается.

В данном случае можно также установить, что параметры такой частично равнонапряженной рессоры являются решением другой задачи оптимизации, которая в определенном смысле более естественна. Так как изгиб линейный, то прогиб $\Delta = AF$. Максимальное напряжение в рессоре

$$\sigma_{\max} = \max\left(\max_{0\le x\le l_1}\left|\sigma_1(x)\right|,\ \max_{0\le x\le l_2}\left|\sigma_2(x)\right|\right).$$

Так как изгиб линейный, то $\sigma_{\max} = BF$. При заданных E, w, l_1, величины A и B есть функции l_2, h_1, h_2. Более естественная задача оптимизации рессоры состоит в отыскании l_2, h_1, h_2 таких, что $B = \min$ при условии, что $A = A_0$ задано. Вводя безразмерные параметры $\lambda = \left(3 - l_2/l_1\right)/2$, $\mu = 1\Big/\left(1 + h_1^3/h_2^3\right)$, принадлежащие области D $\left(1 \le \lambda < 3/2,\ 0 < \mu < 1\right)$, нетрудно из (9)–(13), (2) найти, что

$$A = \left(4l_1^3\Big/\left(Ewh_1^3\right)\right)\alpha(\lambda,\mu),$$

$$B = \left(6l_1\Big/\left(wh_1^2\right)\right)\beta(\lambda,\mu),$$

где

$$\alpha(\lambda,\mu) = 1 - \lambda^2(3 - 2\lambda)\mu,$$

$$\beta(\lambda,\mu) = \max\left(\left|1 - \lambda\mu\right|,\ 2(\lambda - 1),\ \lambda\mu^{1/3}(1-\mu)^{2/3}\right).$$

Тогда упомянутая задача оптимизации сводится к отысканию точки безусловного минимума функции $\beta(\lambda,\mu)\big/\alpha(\lambda,\mu)^{2/3}$ в области D. Принципиально несложное (но несколько громоздкое) решение этой задачи минимизации приводит к выписанным выше значениям l_2/l_1 и h_2/h_1. Этот результат является нетривиальным и позволяет надеяться, что найденные выше параметры равнонапряженных рессор также являются решениями аналогичных задач минимизации. Однако строгого доказательства этого утверждения в настоящее время не имеется.

Заключение

В работе найден ряд новых параметров оптимальных, в смысле равнонапряженности, листовых рессор. Показано, что такие рессоры не всегда существуют даже при возможности подбора переменного профиля, а существующие могут иметь особенность – внутренний шарнир. Установлено совпадение параметров частично равнонапряженной двухлистовой рессоры с листами постоянных профилей с параметрами такой же рессоры с минимизированным максимальным напряжением. Полученные результаты имеют практическое значение для проектирования надежных и долговечных рессор, а также вносят вклад в общую теорию расчета рессор.

Список литературы

1. Пархиловский И.Г. Автомобильные листовые рессоры. М.: Машиностроение, 1978. 227 с.
2. Пономарев С.Д. и др. Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 1. М .: Машгиз, 1956. 884 с.
3. Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending / Osipenko M.A., Nyashin Y.I, Rudakov R.N., Ostanin A.V., Kuleshova E.N., Zhuravleva T.N. // Russian Journal of Biomechanics. 2001. Vol. 5. No. 2. P. 18-29.
4. Оптимизация двухлистового упругого элемента протеза стопы с использованием линейной и нелинейной теорий изгиба / Брынских С.И., Осипенко М.А., Няшин Ю.И. // Российский журнал биомеханики. 2003. Т. 7. № 2. С. 9-19.
5. Significance of nonsagittal power terms in analysis of a dynamic elastic response prosthetic foot / Geil M.D., Parnianpour M., Berme N. // Journal of Biomechanical Engineering. October 1999. Vol. 121. P. 521-524.
6. К теории изгиба листовой рессоры / Няшин Ю.И., Осипенко М.А., Рудаков Р.Н. // Известия РАН. Механика твердого тела. 2002. № 6. С. 134-143.
7. О свойствах коэффициента использования материала листовой рессоры / Осипенко М.А., Таланцев Н.Ф. // Изв. вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2009. № 2(10). С. 134-144.
8. A contact problem in the theory of leaf spring bending / Osi-

penko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. // International Journal of Solids and Structures. 2003. Vol. 40. P. 3129-3136.

9. Об одном подходе к решению некоторых одномерных контактных задач / Осипенко М.А., Няшин Ю.И. // Известия Саратовского университета. Новая серия. 2011. Т. 11, сер. Математика. Механика. Информатика, вып. 1. С. 77-84.

10. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 711 с.

INFORMATION ABOUT THE PAPER IN ENGLISH

EQUAL-STRESS LEAF SPRINGS

Nyashin Yury Ivanovich – D.Sc. (Eng.), Professor, Head of the Theoretical Mechanics and Biomechanics Department, Perm National Research Polytechnic University, Russia. Phone: +7(342) 239 17 02. E-mail: nyashin@inbox.ru.

Osipenko Mikhail Anatolyevich – Ph.D. (Physics and Mathematics), Associate Professor, Perm National Research Polytechnic University, Russia. Phone: +7 (342) 239 17 02. E-mail: oma@theormech.pstu.ac.ru.

Gitman Mikhail Borisovich – D.Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Perm National Research Polytechnic University, Russia. Phone: +7 (342) 239 12 97. E-mail: tpv@matmod.pstu.ac.ru.

Abstract. A series of results concerning the finding of the parameters of the equal-stress leaf springs is presented. The nonlinear bending of the single-leaf spring of the variable profile is considered. It is established that the optimum profile for a strong bending is elliptic. The linear bending of a two-leaf spring with leaves of a variable profile is studied. It is proved that the equal-stress spring does not exist for different lengths of leaves, if the stresses sign is invariable along leaves. Such spring exists only for equal lengths of leaves. If the sign varies but the absolute value of stress is invariable, then the equal-stress spring exists when a shorter leaf is sufficiently long. Such spring contains the internal joint. The parameters of a partially equal-stress two-leaf spring with constant profiles of the leaves are found. The connection between these parameters and a solution of the problem of maximum stress minimization is established.

Keywords: leaf spring, linear and nonlinear bending, equal-stress spring, internal joint, stress minimization.

References

1. Parkhilovsky I.G. *Avtomobilnye listovye ressory* [Automotive leaf springs]. Moscow: Mechanical Engineering, 1978. 227 p.
2. Ponomarev S.D. et al. *Raschyoty na prochnost v mashinostroenii* [Stress calculation in mechanical engineering]. Vol. 1. Moscow: Mechanical Engineering Publ., 1956. 884 p.
3. Osipenko M.A., Nyashin Y.I, Rudakov R.N., Ostanin A.V., Kuleshova E.N., Zhuravleva T.N. Mathematical modelling of the foot prosthesis elastic element under bending. *Russian Journal of Biomechanics*. 2001, vol. 5, no. 2, pp. 18–29.
4. Brynskikh S.I., Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Optimizatsiya dvukhlistovogo uprugogo elementa proteza stopy s ispolzovaniem lineinoi i nelineinoi teoriy izgiba [The optimization of the two-leaf elastic element of the foot prosthesis under linear and non-linear bending theories]. *Rossiisky zhurnal biomekhaniki* [Russian Journal of Biomechanics]. 2003, vol. 7, no. 2, pp. 9–19.
5. Geil M.D., Parnianpour M., Berme N. Significance of nonsagittal power terms in analysis of a dynamic elastic response prosthetic foot. Journal of Biomechanical Engineering. October 1999, vol. 121, pp. 521–524.
6. Nyashin Yu.I., Osipenko M.A., Rudakov R.N. K teorii izgiba listovoy ressory [On the theory of leaf spring bending]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela* [Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Solids]. 2002, no. 6, pp. 134–143.
7. Osipenko M.A., Talantsev N.F. O svoistvakh koeffitsienta ispolzovaniya materiala listovoy ressory [On the properties of the material utilization coefficient for a leaf spring]. *Izvestiya VUZov. Povolzsky region. Tekhnicheskie nauki* [News of Higher Educational Institutions. Volga Region.Technical Sciences]. 2009, no. 2(10), p. 134–144.
8. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I., Rudakov R.N. A contact problem in the theory of leaf spring bending. *International Journal of Solids and Structures*, 2003, vol. 40, pp. 3129-3136.
9. Osipenko M.A., Nyashin Yu.I. Ob odnom podkhode k resheniyu nekotorykh odnomernykh kontaktnykh zadach [A certain approach to solving some one-dimensional contact problems]. *Izvesiya Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika.* [News of Saratov University. New Series. Series in Mathematics, Mechanics, Computer Science]. 2011, vol. 11, no. 1, pp. 77–84.
10. Rabotnov Yu.N. *Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela* [Mechanics of Deformable Solids]. Moscow: Science, 1988, 711 p.

УДК 621.778.011:001.891.57

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕТАЛЛОВ И СПЛАВОВ В ПРОЦЕССАХ ОБРАБОТКИ ДАВЛЕНИЕМ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ СТРУКТУРЫ

Барышников М.П.[1], Чукин М.В.[1], Бойко А.Б.[1], Дыя Х.[2], Назайбеков А.Б.[3]

[1] Магнитогорский государственный технический университет им. Г.И. Носова, Россия
[2] Ченстоховский технологический университет, Польша
[3] Рудненский индустриальный институт, Казахстан

Аннотация. В работе представлены результаты исследования влияния неоднородности структурных составляющих на напряженно-деформированное состояние в процессах обработки давлением металлов и сплавов.